Véletlenszámok, véletlen események

I. Valószínűségszámítási alapfogalmak

1. Esemény, elemi esemény
2. Gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség
   (fontos tulajdonságai: P(0)=0, P(I)=1, 0≤P(A)≤1, P(A+B)=P(A)+P(B)–P(AB))
3. Eloszlás ($\sum P_i = 1$) véges, illetve végtelen eseményrendszerre,
   eloszlásfüggvény ($F(x) = P(x < x)$, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$),
   sűrűségfüggvény ($F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\,dz$),
   függetlenség (P(A|B)=P(A), vagy P(AB)=P(A)*P(B))
4. Várható érték ($\sum x_i P(x = x_i)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$),
   szórásnégyzet ($\mathrm{D}^2(\xi) = M\left((\xi - M(\xi))^2\right) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$)

II. Véletlenszámok előállítása

1. Követelmények
   - minden lehetséges kimenetele előbb-utóbb bekövetkezzen
   - az előzőekből ne lehessen következtetni a következőre
   - szokásos problémái: periodikus, illetve elfajulhat
2. Módszerek
   - Négyzetközép módszer, szorzatközép módszer
   - Lineáris kongruencia módszer

     Ha $x_{n+1} \equiv ax_n + c \pmod m$, akkor m lesz a periódushossz, ha $m=2^K$,

     a=4x+1, (c,m)=1 (és m prímosztói a–1-nek is prímosztói) – lineárisra ez a maximum.
   - Nemlineáris kongruenciamódszerek
   - Kombinált módszerek (sorosan kapcsolt, párhuzamosan kapcsolt, visszacsatolásos: összegük, kizáró vagy, egyik a másik számaiból választ, a másik véletlen tagjait helyettesíti, zavarás, a másik tagjait keveri, ...)
3. A jóság ellenőrzése (véletlen számok, számjegyek sorozatára)

Mit nevezünk véletlennek: 1-egyenletes, K-egyenletes, Ą-egyenletes sorozatok – X dimenziós kockába esés relatív gyakorisága → a kocka térfogatához.

- K hoszúságú sorozatainak gyakorisága (K=1,2,...)
- egy szám (számjegy, számosztály) két előfordulása közötti hézagok vizsgálata
- adott számminták gyakoriságai
- kombinációk gyakoriságai (Póker teszt: abcd,aabc,aabb,aaab,aaaa gyakoriságai)
- futampróba: monoton szakaszok vizsgálata

- szériavizsgálat: azonos számjegyek sorozatai
- egyenletesség ellenőrzés illeszkedés vizsgálattal
- látványos ellenőrzés: véletlen pontok a képen

4. [0,1) intervallumon egyenletes eloszlás:

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$D^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right)^2 = \int_0^1 x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

III. Véletlenszámok programozási nyelvekben

1. Turbo Pascal: Random, Random(N)

IV. Véletlen események előállítása

1. 2 esemény, teljes eseményrendszer (P valószínűségű esemény)
2. 2 esemény, nem kizáróak
3. 2 esemény, lehet, hogy egyik sem következik be

V. Diszkrét valószínűségi változók előállítása

1. Véges sok tagú (teljes eseményrendszer)
2. Végtelen sok tagú (véges sokra visszavezetés)

VI. Tapasztalati eloszlás készítése

1. Diszkrét: melyik érték hányszor fordul elő
2. Folytonos rendezett mintára: f(x):=k/x, ha $x_{k+1} \geq x \geq x_k$)

VII. Speciális eloszlások előállítása (R egyenletes eloszlásúból)

1. Binomiális eloszlás (hányszor következik be egy p valószínűségű esemény n kísérletből): M=np, D^2=np(1–p)

$$\mathrm{p}(\mathrm{i}) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$ és ekkor ezek teljes eseményrendszert alkotnak, vagy

$$\chi_p(x) = \begin{cases} 1, & ha \quad x < p \\ 0, & ha \quad x \geq p \end{cases}$$ és ekkor $i := \sum_{j=1}^{n} \chi_p(R)$

2. Geometriai eloszlás (egy p valószínűségű esemény első bekövetkezésének sorszáma): M=1/p, D^2=(1–p)/p^2

$$p(i) = (1-p)^{i-1} p$$ és ekkor ezek teljes eseményrendszert alkotnak, vagy

belátható, hogy $n - 1 < \frac{\ln(R)}{\ln(1-p)} \leq n$ éppen p(n) valószínűséggel igaz, tehát

$$i := \left\lceil \frac{\ln(R)}{\ln(1-p)} \right\rceil$$

3. Poisson eloszlás(esemény bekövetkezésének gyakorisága): M=l, D^2=l
   stacionárius: időponttól nem, csak az időtartamtól függ,
   utóhatásmentes: korábbi bekövetkezésszámtól független,
   ritka: 0 a valószínűsége, hogy egy kellően rövid idő alatt kétszer is bekövetkezik.

$p(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$, felhasználva diszkrét valószínűségi változók előállításának módszerét, olyan i-t kell találni, amelyre: $e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda^j}{j!} \le R < e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{i} \frac{\lambda^j}{j!}$, ehhez generáljuk a következőket:

```
T(0):=1, T(n):=T(n-1)*l/n,
S(0):=T(0), S(n):=S(n-1)+T(n),
```

ekkor a keresett I-re igaz: S(I-1)≤ e^lR < S(I)

Más módszer: Képezzük az R_1, R_1R_2, $R_1R_2R_3$, ... szorzatokat, amíg a szorzat kisebb nem lesz, mint e^{-l}, I tagú szorzat esetén I–1 legyen a Poisson-eloszlású véletlenszám!

Exponenciálisok összege, amíg nagyobb nem lesz 1-nél.

4. Diszkrét egyenletes eloszlás (N lehetséges érték fordul elő)

$$i := n * R + 1$$

5. [A,B) intervallumon egyenletes eloszlás: M=(A+B)/2, D^2=(B-A)^2/12

$$f(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x < A \, vagy \quad x > B \\ \frac{1}{B-A}, & ha \quad A \le x \le B \end{cases}$$

X:=(B–A)*R+A

6. Normális eloszlás (független valószínűségi változók összege): M=0, D^2=1

m várható értékű, d szórású valószínűségi változók összegének eloszlása:

$\frac{1}{d\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (R_i - m)$ a standard normális eloszláshoz tart.

$$f(x) = \frac{1}{d\sqrt{2n}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2d^2}}$$

R várható értéke 1/2, szórása $1/\sqrt{12}$, egyszerű lesz n=12 esetén.

N(m,d)=d**N*(0,1)+m

7. Exponenciális (inverz függvény módszer): M=1/l, D^2=1/l

eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-mx}$, F(F^{-1}(x))=x képlet alapján $x := \frac{\ln(R)}{-m}$

$1-e^{-mg(x)}=x \Rightarrow 1-x=e^{-mg(x)} \Rightarrow \ln(1-x)=-mg(x) \Rightarrow ...$ ahol tudjuk, hogy 1–R és R azonos eloszlású

8. χ^2–eloszlás

független, azonos eloszlású valószínűségi változók négyzetösszege

9. F-eloszlás

χ^2–eloszlású valószínűségi változók hányadosa

10. t-eloszlás

normális és χ^2–eloszlású valószínűségi változó hányadosa