Nagypontosságú aritmetika

I. Egész aritmetika

Számok ábrázolása:

- komplemens ábrázolás (negatív számok így nagyon sokjegyűek)
- előjel + számjegyek + hossz + számrendszer (tömb vagy szöveg):

  $x = x_0 + x_1S + x_2S^2 + ... + x_nS^n$

  A műveleteknél az előjelet külön kezeljük, a műveleteket vissza- vezetjük pozitív számokkal végzett műveletekre.

1. Hosszú számok összeadása $((z_0,...,z_{n+1})=(x_0,...,x_n)+(y_0,...,y_n))$

- a rövidebb szám hosszáig összeadás, majd csak átvitel számolás
- a rövidebb számot kiegészítjük 0-kkal

  $z_i=(x_i+y_i+c_{i-1}) \bmod S$: $c_i=(x_i+y_i+c_{i-1}) \operatorname{div} S \quad (i=0,...,n)$

  $z_{n+1}=c_n$

2. Hosszú számok kivonása $((z_0,...,z_n)=(x_0,...,x_n)-(y_0,...,y_n))$

  $z_i=(x_i-y_i+c_{i-1}) \bmod S$: $c_i=(x_i-y_i+c_{i-1}) \operatorname{div} S \quad (i=0,...,n)$

3. Hosszú számok szorzása $((z_0,...,z_{n+m+1})=(x_0,...,x_n)*(y_0,...,y_m))$

  $r_{i,j}=(x_i*y_j+c_{i-1,j}) \bmod S$: $c_{i,j}=(x_i*y_j+c_{i-1,j}) \operatorname{div} S$

  $r_{n+1,j}=c_{n,j}$

$$z_k = \Big(\sum_{i+j=k} r_{i,j} + d_{k-1}\Big) \bmod S: \; z_k = \Big(\sum_{i+j=k} r_{i,j} + d_{k-1}\Big) \operatorname{div} S$$

vagy azonnal az eredményhez hozzáadni (sok átvitel lehet)

vagy eredmény szerinti sorrendben számolni:

$$z_k = \Big(\sum_{i+j=k} x_i * y_j + d_{k-1}\Big) \bmod S: \; z_k = \Big(\sum_{i+j=k} x_i * y_j + d_{k-1}\Big) \operatorname{div} S$$

4. Felezéses szorzási algoritmus kettes számrendszerhez

$$A*B = \begin{cases} A & \text{ha } B = 1 \\ (2*A)*(B/2) & \text{ha } B \text{ páros} \\ A + A*(B-1) & \text{ha } B \text{ páratlan} \end{cases}$$

5. Felezéses hatványozási algoritmus kettes számrendszerhez

$$A\hat{\ }B = \begin{cases} A & \text{ha } B = 1 \\ (A*A)\hat{\ }(B/2) & \text{ha } B \text{ páros} \\ A*A\hat{\ }(B-1) & \text{ha } B \text{ páratlan} \end{cases}$$

6. Osztás

- kivonással (z:=x: h:=0: zły -® (h:=h+1: z:=z–y))
- eltolással és kivonással (z:=x: v:=y*S^K: h:=0
  K-szor → (h:=h*S:
  złv → (h:=h+1: z:=z–v)
  v:=v/S))
- hányados becslésével, visszavezetés "n+1-jegyű osztása n-jegyűvel" esetre: $(u_0,u_1,...u_{n+1})/(v_0,...,v_n)$

  a H hányados Q becslése a következő (v≥S/2 esetén):

  $Q := \frac{Su_{n+1}+u_n}{v_n}$, így Q=H vagy H+1 vagy H+2

  Egy gyors ellenőrzési lehetőség:

  $v_{n-1}Q>(Su_{n+1}+u_n-Qv_n)*S+u_{n-1}$ → Q:=Q–1 (esetleg kétszer)

  Ha még mindig nem jó, akkor teljes ellenőrzés

```
Osztás(U(),V(),H):
  Ha U(N+1)=V(N) akkor      Q:=S-1
                 különben   Q:=(S*U(N+1)+U(N))/V(N)
  Ciklus amíg V(N-1)*Q>(S*U(N+1)+U(N)-Q*V(N))*S+U(N-1)
    Q:=Q-1
  Ciklus vége
  W():=V()*Q
  U():=U()-W()
  Ha U()<0 akkor U():=U()+V(): Q:=Q-1
  H:=Q
Eljárás vége.
```

7. Szorzás, osztás alapszámmal, alapszámhatvánnyal (léptetés)

8. Növelés, csökkentés 1-gyel (átvitelszámítás amíg kell)

9. Relációk (hossz felhasználása, azonos hossznál lexikografikusan)

10. Reciprok számítás (X=1/A (2^{2n-1}/A), $x_{n+1}=2*x_n-A*x^{2,n}$ – iteráció,

   $1>X_0*A$ – konvergencia,

   $X_0*A>1/2$ – helyes jegyek száma duplázódik)

Reciprok($[a_1,...,a_n]$):
Ha N=1 akkor Reciprok:=[10]
különben $[c_0,...,c_{n/2}]$:=Reciprok($[a_1,...,a_{n/2}]$)
$[d_1,...,d_{2*n}]:=[c_0,...,c_{n/2}]*2^{3*n/2}-$
$[c_0,...,c_{n/2}]^2*[a_1,...,a_n]$
$[a_0,...,a_n]:=[d_1,...,d_{n+1}]$
Reciprok:=$[a_0,...,a_n]$
Eljárás vége.

II. Polinomaritmetika (nagypontosságú aritmetika átvitel nélkül)

1. Helyettesítési érték

- $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
- Horner-elrendezés: $P(x)=a_0+x*(a_1+x*(...+x*a_n)...)$

2. Osztás $\left(\dfrac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j} \right)$

$h_{n-m-i} = \dfrac{a_{n-i}}{b_m}$: $A := A - B * x^{n-m-i} * h_{n-m-i}$ i=0..n–m

(a_{n-i}:=0: (j=1..m: $a_{n-i-j}:=a_{n-i-j}-b_{m-j}*h_{n-m-i}$))

3. Derivált polinom ($P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $P^{(k)}(x) = ?$)

$P^{(k)}(x) = \left(P^{(k-1)}(x)\right)^{©}$, azaz $a_{j-1}^{k} = j * a_j^{k-1}$

vagy

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \ldots \ + a_1 x + a_0 = 0$ K. deriváltja:

$n(n-1)..(n-k+1)a_n x^{n-k} + (n-1)..(n-k)a_{n-1} x^{n-k-1} + \ \ldots \ + k(k-1)..*1 a_k = 0,$

ezért $c_0^k = k!$, $c_i^k = c_{i-1}^k * \dfrac{k+i}{i}$, $a_i^k = a_{i+k}^0 c_i^k$

III. Közelítések

1. $\sqrt{2}$

A: $x_{n+1} := \dfrac{1}{2} * \left(x_n + \dfrac{2}{x_n} \right)$

B: Pell-egyenlet: $P^2 - N*Q^2 = 4$ végtelen sok megoldása van, ha N nem négyzetszám.

N=2 esetén:

Ha $x_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ alakú, akkor $x_{n+1} := \dfrac{1}{2} * \left(x_n + \dfrac{2}{x_n} \right) = \dfrac{P_n^2 - 2}{P_n * Q_n} = \dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$

szintén megoldása a Pell-egyenletnek.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{P_n}{Q_n} = \sqrt{2}$, így pl. P_0=6726, Q_0=4756 esetén 17 lépés alatt az eredmény 1000000 jegyre lesz pontos. (Jó P_0=6, Q_0=4 is.)

(P_0,Q_0) megkeresése:

```
(P,Q):=(1,1)
Ciklus amíg P^2-2*Q^2≠4
   Ha P^2-2*Q^2<4 akkor   P:=P+1
                különben  Q:=Q+1
Ciklus vége
```

Tehát csak egész számokkal kell dolgozni, szorzás és kivonás műveletre van szükség.

2. e

$$e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}=1+1+\frac{1}{2}*\left(1+\frac{1}{3}*(\ldots)\right)$$

3. π

- Ä nevezetes törtek (256/81≈3.16, 22/7 > p > 223/71)
- Ä $\frac{\pi}{2}=\frac{2*2*4*4*6*6*\ldots}{1*3*3*5*5*7*\ldots}$ – Wallis formula
- Ä kör közelítése szabályos sokszögekkel
- Ä $\pi=24*arctg\frac{1}{8}+8*arctg\frac{1}{57}+4*arctg\frac{1}{239}$

$$arctg(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$$

IV. Racionális aritmetika

1. Ábrázolás

- Ä előjel + számláló számjegyei + számláló hossza + nevező számjegyei + nevező hossza + számrendszer (tömb vagy szöveg):

2. Összeadás, kivonás

$$\frac{U_s}{U_n}\pm\frac{V_s}{V_n}=\frac{U_s*\frac{V_n}{D}\pm V_s*\frac{U_n}{D}}{\frac{U_n}{D}*V_n}$$, ahol $D=lnko(U_n,V_n)$

3. szorzás, osztás

$$\frac{U_s}{U_n}*\frac{V_s}{V_n}=\frac{\frac{U_s}{D_1}*\frac{V_s}{D_2}}{\frac{U_n}{D_2}*\frac{V_n}{D_1}}$$ U_s, ahol $D_1=lnko(U_s,V_n)$, $D_2=lnko(U_n,V_s)$

4. Legnagyobb közös osztó, alkalmazása nagyságrend csökkentésre

- Ä euklideszi algoritmus
- Ä kivonásos algoritmus
- Ä bináris algoritmus

5. Racionális $\rightarrow$ fixpontos valós konverzió (osztás törthelyiértékű eredményekre is, előre megadott maximális pontossággal)

6. Kétszeres pontosságú műveletek alkalmazása

7. Közelítés túlcsordulás esetén

V. Fixpontos valós aritmetika

1. Ábrázolás
   - mint az egész + tizedespont helye
   - mint az egész, de negatív indexek is vannak
2. Műveletek
   - összeadásnál, kivonásnál a különböző hosszúságú törtrészek esete
   - osztás adott hosszúságú törtrészre
   - lebegőpontossá alakítás, racionálissá alakítás, közelítés racionálissal

VI. Lebegőpontos aritmetika

1. Ábrázolás (normalizált)
   - egész mantissza, egész karakterisztika, mantissza alapszáma
2. Műveletek (utánuk normalizálás)
   - összeadás, kivonás: azonos kitevőre hozás

     ($K_1 \geq K_2$ esetén: $K:=K_1$: $A:=A_1+A_2/S^{K_1-K_2}$)
   - szorzás, osztás
   - normalizálás (kerekítés)
   - fixpontossá alakítás

VII. Számrendszerek közötti konverzió (A alapúból B alapúba)

0. Általános feladat: $(u_n,...u_1u_0,u_{-1},...u_{-m})_A \rightarrow (v_p,...v_1v_0,v_{-1},...v_q)_B$

   ahol $\sum_{i=-m}^{n} u_i * A^i = \sum_{j=-q}^{p} v_j * B^j$

Alkalmazzunk egy közbülső számrendszert, amiben az egyik szumma kiszámolható!

Kivétel: $A=B^k$, ahol k vagy 1/k természetes szám.

1. Egész számok: B-vel osztás A alapúban ($U_A \rightarrow (u_m,...u_0)_B$)

   u_0:=U mod B: U:=U div B: ...

2. Egész számok: A-val szorzás B alapúban ($(u_m,...u_0)_A \rightarrow U_B$)

   $U:=u_0+A*(u_1+A*(...))$

3. Törtek: B-vel szorzás A alapúban ($U_A \rightarrow (0,u_{-1},...u_{-m})_B$)

   u_{-1}:=egészrész(U*B): U:=törtrész(U*B): ...

4. Törtek: A-val osztás B alapúban ($(0.u_{-1},...u_{-m})_A \rightarrow U_B$)

$U:=((...+u_{-2})/A+u_{-1})/A$

5. Vegyes alapú számrendszerek (faktoriális, idő, ...)
6. Negatív alapú, reciprok alapú számrendszerek

Kombinatorikai alkalmazások

I. Az összes előállítása (backtrack és javításai, N,K vagy rekurzió)

1. Variációk előállítása (ismétléses, ismétlés nélküli)

2. Permutációk előállítása (ismétléses, ismétlés nélküli)

3. Kombinációk előállítása (ismétléses, ismétlés nélküli)

4. Permutáció rekurzívan: ha n-1 elem összes permutációja kész, akkor szúrjuk be az n.-et minden lehetséges helyre, mindegyikbe!

5. Részhalmazok: megfeleltetés a részhalmazok és az N-jegyű bináris számok között.

6. Kompozíciók (K db részhalmaz diszjunkt uniójaként előállítás): olyan K-jegyű számok, ahol a számjegyek összege pontosan N.

7. Partíciók (max. N db nem üres részhalmaz diszjunkt uniója)

II. Az I. előállítása (N,K)

1. Variációk előállítása (ismétléses)

   I felírása K alapú számrendszerben

2. Permutációk előállítása (ismétléses, ismétlés nélküli)

   Vegyünk egy rendező módszert! F:=0: K:=rendezendő elemek száma

   A rendező ciklus belsejében: F:=F*K+elmozdulási távolság: K:=K-1

   Ezzel megkapjuk egy permutáció sorszámát (faktoriális számrendszerben felírt szám). Az i. permutáció előállítása ezután ennek az ellenkezőjével történik: K:=2

   A ciklusban: T:=i mod K: i:=i div K: K:=K+1: mozgatás T távolságra.

Inverziós táblázat: $a_1,...,a_n \rightarrow b_1,..,b_n$, ahol b_i jelentse az i.-től balra levő, nála nagyobb elemek számát (ez pl. rendezett vektor esetén csupa 0 elemet tartalmazó táblázat lesz, illetve egyetlen, faktoriális számrendszerben felírt szám), ekkor egy permutáció előállítása:

```
sorozat:=[N]
ciklus i=N-1-től 1-ig -1-esével
  beilleszt(i,b[i]. helyre)
ciklus vége
```

3. Részhalmaz előállítása: az I szám bináris alakjának meghatározása

III. Egy véletlen előállítása

1. Variációk előállítása (ismétlés nélküli, ismétléses)

   variáció=kombináció+permutáció, illetve visszatevéses mintavétel

2. Permutációk előállítása (ismétlés nélküli)

   Ä keverés véletlen kiválasztással

   Ä keverés véletlen beillesztéssel

3. Kombinációk előállítása (ismétlés nélküli)

   Ä kiválogatás N elemből ((K–DB)/(N–I+1) valószínűséggel az I. elemet)

Ä kiválogatás ismeretlen számú elemből (az új elemet K/(K+1) valószínűséggel tesszük be egy véletlen régi helyére)

4. Részhalmaz előállítása: N db indikátorváltozó előállítása

5. Kompozíció előállítása: N db [1,K]-beli diszkrét egyenletes változó felhasználása

6. Partíció előállítása: N-1 eleműből ® 1/N valószínűséggel tesszük mindegyikbe, valamint 1/N valószínűséggel tesszük új részhalmazba.

Grafika a programozási nyelvekben

I. Grafikus megjelenítés fázisai

1. Rajzelemlista → pásztakonverzió → képpontpuffer → display vezérlő → képernyő
2. Display vezérlő: karakteres kép, illetve grafikus kártyák, paraméterezésük
3. Pascal: InitGraph, CloseGraph, RestoreCrtMode, DetectGraph

II. Grafikus rendszer felépítése

1. Utasítások tartalmaznak minden paramétert
2. Grafikus állapottábla, Set..., Get..., ... műveletek

III. Ablaktechnika (Turbo Pascal)

1. Karakteres képernyőn (Window)
2. Grafikus képernyőn (ViewPort)

IV. Elemi grafikai utasítások és használatuk (Turbo Pascal)

1. Szövegmegjelenítés	OutTextXY
2. Pontrajzolás	PutPixel

V. További grafikai lehetöségek

1. Szakasz	Line
2. Téglalap	Bar, Rectangle
3. Kör	Circle
4. Ellipszis	Ellipse
5. Körív	Arc
6. Festés	FloodFill

Függvényábrázolás

I. 1-változós függvények

1. Elemi megoldás
2. Képernyőre transzformálás
3. Képernyőre transzformálás azonos nyújtási tényezővel
4. Képernyőre transzformálás azonos nyújtási tényezővel, origó helybenhagyása
5. A pontoknak megfelelő magasságú téglalap rajzolása a kép aljától
6. A pontoknak megfelelő magasságú téglalap rajzolása az X-tengelytől
7. A rajzolt pontok összekötése egyenessel
8. Közelítő görbe (K.-fokú polinom a legkisebb négyzetek módszerével).

9. Közelítő görbe

N+1 ponthoz létezik N.-fokú polinom, ami az összes ponton átmegy:

$$\sum_{j=0}^{n} y_j * \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

10. A rajzolt pontok összekötése harmadfokú spline-nal

$S_i(x) = \sum_{k=0}^{3} a_{ik} x^k$, ahol

$S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $S_i(x_i) = y_i$ (i=1,..,n)

$S_i^{'}(x_i) = S_{i+1}^{'}(x_i)$ (i=1,..,n-1)

$S_i^{''}(x_i) = S_{i+1}^{''}(x_i)$ (i=1,..,n-1)

ez így 4n ismeretlen, 4n–2 egyenlet, tehát kell még 2 egyenlet:

$S_1^{'}(x_0) = s_1$, $S_n^{'}(x_n) = s_2$ vagy $S_1^{''}(x_0) = 0$, $S_n^{''}(x_n) = 0$

11. Görbék paraméteres alakja

f(x,y)=0 → x(t)=f_1(t), y(t)=f_2(t)

12. Bezier görbe

$B_x(t) = \sum_{i=0}^{n} x_i * B_{in}(t)$, $B_y(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i * B_{in}(t)$, ahol $B_{in}(t) = \binom{n}{i} t^i * (1-t)^{n-i}$.

Ezzel az i. pontnak t=n/i-nél van a legnagyobb hatása.

13. B-spline

14. A képernyő oszlopai szerinti pontrajzolás

II. 2-változós függvények

0. A második változóval időben követve az első változót.
1. Árnyalatokkal (színek, árnyalatok, zebrakép két színnel)
2. Szintvonalakkal (függőleges vagy vízszintes)

   Szintvonalvariációk:

   Ä lehessenek ferde szintvonaldarabok is

   Ä szintvonalak a rácspontoktól arányos távolságra

   Ä a különböző magasságú szintvonallal határolt területek festése, zebrakép
3. Pontfelhővel
4. Pszeudoplasztikus kép (megvilágítás 1 irányból, 2 irányból, 4 irányból)
5. Gradiensmódszer
6. Árnyékolt téglalapokkal
7. Függvényhálós:

   N db Y-szerinti függvény, tömör függvény alatti terület

   N db Y- és N db X-szerinti függvény, tömör függvény alatti terület

   N db Y-szerinti függvény, "lepel"

   N db Y-szerinti függvény, "lepel" – minden képernyőoszlopra számolva

Véletlenszámok, véletlen események

I. Valószínűségszámítási alapfogalmak

1. Esemény, elemi esemény
2. Gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség
   (fontos tulajdonságai: P(0)=0, P(I)=1, 0≤P(A)≤1, P(A+B)=P(A)+P(B)–P(AB))
3. Eloszlás ($\sum P_i = 1$) véges, illetve végtelen eseményrendszerre,
   eloszlásfüggvény ($F(x) = P(x < x)$, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$),
   sűrűségfüggvény ($F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)\, dz$),
   függetlenség (P(A|B)=P(A), vagy P(AB)=P(A)*P(B))
4. Várható érték ($\sum x_i P(x = x_i)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$),
   szórásnégyzet ($D^2(\xi) = M\left((\xi - M(\xi))^2\right) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$)

II. Véletlenszámok előállítása

1. Követelmények
   - minden lehetséges kimenetele előbb-utóbb bekövetkezzen
   - az előzőekből ne lehessen következtetni a következőre
   - szokásos problémái: periodikus, illetve elfajulhat
2. Módszerek
   - Négyzetközép módszer, szorzatközép módszer
   - Lineáris kongruencia módszer

     Ha $x_{n+1} \equiv a x_n + c \pmod{m}$, akkor m lesz a periódushossz, ha $m = 2^K$,

     a=4x+1, (c,m)=1 (és m prímosztói a–1-nek is prímosztói) – lineárisra ez a maximum.
   - Nemlineáris kongruenciamódszerek
   - Kombinált módszerek (sorosan kapcsolt, párhuzamosan kapcsolt, visszacsatolásos: összegük, kizáró vagy, egyik a másik számaiból választ, a másik véletlen tagjait helyettesíti, zavarás, a másik tagjait keveri, ...)
3. A jóság ellenőrzése (véletlen számok, számjegyek sorozatára)

Mit nevezünk véletlennek: 1-egyenletes, K-egyenletes, ∞-egyenletes sorozatok – X dimenziós kockába esés relatív gyakorisága → a kocka térfogatához.

- K hoszúságú sorozatainak gyakorisága (K=1,2,...)
- egy szám (számjegy, számosztály) két előfordulása közötti hézagok vizsgálata
- adott számminták gyakoriságai
- kombinációk gyakoriságai (Póker teszt: abcd,aabc,aabb,aaab,aaaa gyakoriságai)

- futampróba: monoton szakaszok vizsgálata
- szériavizsgálat: azonos számjegyek sorozatai
- egyenletesség ellenőrzés illeszkedés vizsgálattal
- látványos ellenőrzés: véletlen pontok a képen

4. [0,1) intervallumon egyenletes eloszlás:

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{0}^{1} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$D^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx\right)^2 = \int_{0}^{1} x^2\, dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

III. Véletlenszámok programozási nyelvekben

1. Turbo Pascal: Random, Random(N)

IV. Véletlen események előállítása

1. 2 esemény, teljes eseményrendszer (P valószínűségű esemény)
2. 2 esemény, nem kizáróak
3. 2 esemény, lehet, hogy egyik sem következik be

V. Diszkrét valószínűségi változók előállítása

1. Véges sok tagú (teljes eseményrendszer)
2. Végtelen sok tagú (véges sokra visszavezetés)

VI. Tapasztalati eloszlás készítése

1. Diszkrét: melyik érték hányszor fordul elő
2. Folytonos rendezett mintára: f(x):=k/x, ha $x_{k+1} \geq x \geq x_k$)

VII. Speciális eloszlások előállítása (R egyenletes eloszlásúból)

1. Binomiális eloszlás (hányszor következik be egy p valószínűségű esemény n kísérletből): M=np, D^2=np(1–p)

$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ és ekkor ezek teljes eseményrendszert alkotnak, vagy

$\chi_p(x) = \begin{cases} 1 & ha\ x < p \\ 0 & ha\ x \geq p \end{cases}$ és ekkor $i := \sum_{j=1}^{n} \chi_p(R)$

2. Geometriai eloszlás (egy p valószínűségű esemény első bekövetkezésének sorszáma): M=1/p, D^2=(1–p)/p^2

$p(i) = (1-p)^{i-1} p$ és ekkor ezek teljes eseményrendszert alkotnak, vagy belátható, hogy $n-1 < \frac{\ln(R)}{\ln(1-p)} \le n$ éppen p(n) valószínűséggel igaz, tehát

$i := \left\lceil \frac{\ln(R)}{\ln(1-p)} \right\rceil$

3. Poisson eloszlás(esemény bekövetkezésének gyakorisága): M=l, D^2=l

   stacionárius: időponttól nem, csak az időtartamtól függ,

   utóhatásmentes: korábbi bekövetkezésszámtól független,

   ritka: 0 a valószínűsége, hogy egy kellően rövid idő alatt kétszer is bekövetkezik.

$p(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$, felhasználva diszkrét valószínűségi változók előállításának módszerét, olyan i-t kell találni, amelyre: $e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda^j}{j!} \le R < e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{i} \frac{\lambda^j}{j!}$, ehhez generáljuk a következőket:

```
T(0):=1, T(n):=T(n-1)*l/n,
S(0):=T(0), S(n):=S(n-1)+T(n),
```

ekkor a keresett I-re igaz: S(I-1)≤ e^lR < S(I)

Más módszer: Képezzük az R_1, R_1R_2, $R_1R_2R_3$, ... szorzatokat, amíg a szorzat kisebb nem lesz, mint e^{-l}, I tagú szorzat esetén I–1 legyen a Poisson-eloszlású véletlenszám!

   Exponenciálisok összege, amíg nagyobb nem lesz 1-nél.

4. Diszkrét egyenletes eloszlás (N lehetséges érték fordul elő)

   $i := \lfloor n * R \rfloor + 1$

5. [A,B) intervallumon egyenletes eloszlás: M=(A+B)/2, D^2=(B-A)^2/12

   $f(x) = \begin{cases} 0, & ha\ x < A\ vagy\ x > B \\ \frac{1}{B-A}, & ha\ A \le x \le B \end{cases}$

   X:=(B–A)*R+A

6. Normális eloszlás (független valószínűségi változók összege): M=0, D^2=1

   m várható értékű, d szórású valószínűségi változók összegének eloszlása:

   $\frac{1}{d\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (R_i - m)$ a standard normális eloszláshoz tart.

   $f(x) = \frac{1}{d\sqrt{2n}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2d^2}}$

   R várható értéke 1/2, szórása 1/$\sqrt{12}$, egyszerű lesz n=12 esetén.

   N(m,d)=d**N*(0,1)+m

7. Exponenciális (inverz függvény módszer): M=1/l, D^2=1/l

eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-mx}$, $F(F^{-1}(x))=x$ képlet alapján $x := \frac{\ln(x)}{-m}$

$1-e^{-mg(x)} = x \Rightarrow 1-x = e^{-mg(x)} \Rightarrow \ln(1-x) = -mg(x)$ ...ahol tudjuk, hogy 1–R és R azonos eloszlású

8. χ^2–eloszlás

független, azonos eloszlású valószínűségi változók négyzetösszege

9. F-eloszlás

χ^2–eloszlású valószínűségi változók hányadosa

10. t-eloszlás

normális és χ^2–eloszlású valószínűségi változó hányadosa

A kísérletkiértékelés módszerei

I. Alapfogalmak

1. minta, mintaelem, mintanagyság, rendezett minta
2. statisztika: mintatér → **R**

II. Megfigyelések

1. Mit figyeljünk meg? (független paraméterek)
2. Mennyi paramétert figyeljünk meg? (1: átlag, szórás, eloszlás, 2: y=f(x)?, ...)
3. Mely paramétereket figyeljük meg? (paraméterek rangsora)
4. Hogyan válasszunk mintaelemeket, hány kísérletet végezzünk? (→mintavétel)
5. Glivenko-tétele: független, azonos eloszlású (F eloszlásfüggvényű) mintaelemekből képezett tapasztalati eloszlásfüggvény 1 valószínűséggel egyenletesen tart az F eloszlásfüggvényhez.

III. A mintavétel módszerei (mintaelemek függetlenek, azonos eloszlásúak legyenek)

1. egyszerű véletlen mintavétel
2. többfokozatú mintavétel
3. sorozatos (szekvenciális, Wald-módszer) mintavétel
4. csoportos mintavétel
   - egylépéses (teljes csoportok)
   - kétlépéses (a kiválasztott csoportokból választunk elemeket)
5. rácsmódszerek

IV. Méréskiértékelés (torzítatlan, hatásos, konzisztens becslés)

1. A várható érték mérőszámai: Átlag, medián (F(x)=0.5 megoldása), modus (leggyakoribb érték), p-kvantilis (F(x)=p megoldása)
2. A szóródás mérőszámai: szórás, szórásnégyzet, átlagos abszolúteltérés, mintaterjedelem, korrigált tapasztalati szórásnégyzet, szórási együttható (=szórás/átlag)
3. Kovariancia: $\operatorname{cov}(X,Y)=\dfrac{\sum (x_i - M(X))*(y_i - M(Y))}{n}$

   Korreláció: $r(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)*D(Y)}$

   Lineáris regresszió: Y=aX+b → $\sum (y_i - ax_i + b)^2$ minimális legyen

   Nemlineáris regresszió:

   $Y=aX^b$: $X_0=\ln X$, $Y_0=\ln Y$ → $Y_0=\ln a + b\, X_0$

   $Y=ae^{bX}$: Y =ln Y → Y =ln a + b X

   Y=a/X: $X_0=1/X$ → $Y=aX_0$

4. Konfidencia-intervallum (a keresett érték p valószínűséggel benne van)

$$K_k = M(\xi) - t\frac{D(\xi)}{\sqrt{n}},\quad K_v = M(\xi) + t\frac{D(\xi)}{\sqrt{n}},$$ ahol t=t(p,N,f) úgy, hogy

$$p = \int_{K_k}^{K_v} f(x)\,dx$$

5. Hipotézisvizsgálat

nullhipotézis

statisztikai próba: a nullhipotézis elfogadása vagy elutasítása ez egy függvény, amely meghatároz egy [A,B] intervallumot, amibe a keresett érték p valószínűséggel esik.

elsőfajú hiba: elutasítjuk, de igaz

másodfajú hiba: elfogadjuk, de nem igaz

6. Statisztikai becslések

Illeszkedés-vizsgálat: adott eloszlású-e a minta (P(ξ<x)=F(x))?

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{(s_i - nP_i)^2}{nP_i}$$ K–1 szabadsági fokú c^2-eloszlású,

ha $P_i=F(x_i)-F(x_{i-1})$, s_i= az $[x_{i-1},x_i)$-ba esés relatív gyakorisága

Homogenitás-vizsgálat: két minta azonos eloszlású-e (P(x<x)=P(h<x))?

$$\chi^2 = nm\sum_{i=1}^{K} \frac{\left(\frac{s_i}{n} - \frac{t_i}{m}\right)^2}{s_i + t_i}$$ K–1 szabadsági fokú χ^2–eloszlású,

Függetlenség-vizsgálat: két eseményrendszer független-e (K elemre)

(P(ξ<x,η<y))=P(ξ<x)*P(η<y))?

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{(s_{ij} - Kp_i q_j)^2}{Kp_i q_j}$$ nm–1 szabadsági fokú χ^2–eloszlású

$$\chi^2 = K\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(s_{ij} - \frac{t_i u_j}{K}\right)^2}{t_i u_j}$$ (n–1)(m–1) szabadsági fokú χ^2–eloszlású, ahol s_{ij} két esemény együttes gyakorisága, t_i,u_j pedig az egyik, illetve másik rendszerbeli események gyakoriságai.

F–próba: két normális eloszlású minta azonos szórású-e (D(ξ)=D(η))?

$$F = \max\left(\frac{d_1^{*2}}{d_2^{*2}}, 1\right)$$ $(n_1–1)(n_2–1)$ paraméterű F–eloszlású (kétoldali próbánál az 1 helyett a tört reciproka szerepel)

t–próba: egy normális eloszlású minta várható értéke M (M(ξ)=M)?

két normális eloszlású minta várható értéke megegyezik-e (M(ξ)=M(η))?

$$t = \frac{\bar{x} - M}{d^*} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\bar{x} - M}{d}$$ n–1 paraméterű t–eloszlású

u–próba: ugyanaz, ha a szórások (D, D_1, D_2) ismertek (a statisztika normális eloszlású).

$$u = \frac{\bar{x} - M}{d^*}\sqrt{n}$$ normális–eloszlású

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{D_1^2}{n_1} + \frac{D_2^2}{n_2}}}$$ normális–eloszlású

V. Hibás adatok kiszűrése

1. Hihetőségvizsgálat
2. Szélsőértékek elhagyása
3. Szóráson kívüliek elhagyása
4. Mozgóátlagolás (azonos várható érték, szórásnégyzet pedig 2K+1-ed része az eredetinek)
5. Dixon-próba: rendezett mintából elhagyjuk-e az első értéket?

$$r = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_n}$$ (n=3..7 esetén)

$$r = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_{n-1}}$$ (n=8..10 esetén)

$$r = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_{n-1}}$$ (n=11..13 esetén)

$$r = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_{n-2}}$$ (n=14..25 esetén)

VI. Oszlop- és kördiagramok

1. Álló oszlopdiagram: képre transzformálás
2. Növekvő oszlopdiagram: normálás menet közben
3. Időben változó oszlopdiagram:
   - új ablak
   - elölről kezdés törlés nélkül
   - elölről kezdés előtörléssel
   - ablak eltolás
4. Kördiagram: körívek + szakaszok + festés